

Aufgaben

Aufgabe 1. Löse

$$(a + b)^4 - 3 = a^2 + a^2b^2 + 4b^2$$

in den ganzen Zahlen! (eig)

Aufgabe 2. Es sei A ein fester und P ein beweglicher Punkt auf einem Kreis k . Bestimme den geometrischen Ort der Mitten der Sehnen AP !

Aufgabe 3. Seien a , b und c die Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks. Dann gilt:

$$66a^2 + 59b^2 - 24ab - 30ac - 40bc > 0$$

Tip: In spitzwinkligen Dreiecken gilt $a^2 + b^2 > c^2$ (eig)

Aufgabe 4. Es seien zwei nicht parallele Geraden und ein Punkt P in der Ebene gegeben. Konstruiere eine Gerade durch P , die die beiden Geraden in Punkten A und B schneidet, so daß $AP=PB$.

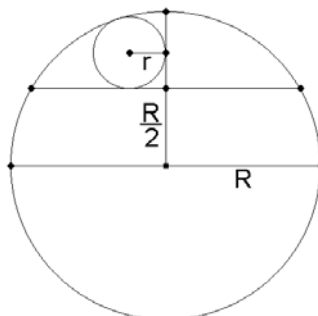
Aufgabe 5. Zeige für reelle x und y die Ungleichung:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1$$

(W 4/82)

Aufgabe 6. Zeige, daß es unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1$ gibt (Tip: Warum gibt es unendlich viele Primzahlen?) (W 9/75)

Aufgabe 7. Auf halber Höhe des Radius R wird eine Orthogonale gezogen. Ein kleiner Kreis berührt den Radius, die Orthogonale und den großen Kreis (siehe Zeichnung). Welchen Radius hat dieser Kreis (im Verhältnis zum Radius des großen Kreises)?



(eig)

Aufgabe 8. Man betrachte die Folge $x_{n+1} = 2x_n + 1$, wobei x_0 eine Primzahl ist. Beweise, daß nicht alle x_n Primzahlen sind. Tip: Bestimme zuerst eine explizite Formel. (W 11/97)

Aufgabe 9. In einem Fünfeck sind vier Seiten parallel zu der gegenüberliegenden Diagonalen. Zeige, daß dann auch die fünfte Seite parallel zu der gegenüberliegenden Diagonalen ist! (IV)

Aufgabe 10. Von n Geraden in der Ebene sind keine zwei parallel und durch den Schnittpunkt zweier Geraden geht immer noch eine dritte. Zeige, daß die Geraden alle durch einen Punkt gehen! (IV)

Aufgabe 11. Liegen 5 Punkte in einem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge 1, so haben zwei einen Abstand, der kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist. (IV)

Aufgabe 12. Im Raum seien drei verschiedene Punkte A , P_1 und P_2 und eine Gerade g durch A so gegeben, daß P_1, P_2 und g in keiner gemeinsamen Ebene liegen. Man bestimme Paare von Kugeln k_1 und k_2 gleichen Durchmessers derart, daß P_1 auf k_1 und P_2 auf k_2 liegt, beide Kugeln sich in A berühren und g eine Tangente an beide Kugeln ist (also in der Tangentialebene liegt)! (IV)

Regeln

Lösungsphase (14-16 Uhr)

Die beiden Mannschaften wählen je einen Mannschaftskapitän, welcher die Mannschaft im Folgenden als Sprecher vertreten wird. Sämtliche Entscheidungen der Mannschaft, die die Mitglieder gemeinsam fällen, werden verbindlich erst durch den Kapitän verkündet. Ansonsten ist er ein reguläres Teammitglied. Danach bearbeiten beide Mannschaften getrennt die gestellten Aufgaben. Dazu ist es notwendig, die Aufgaben zunächst durchzulesen und dann sinnvoll unter den Teammitgliedern aufzuteilen. Sinnvoll bezieht sich hierbei etwa auf den erwarteten Schwierigkeitsgrad oder die Komplexität der Aufgabe. Letztlich sollten zu jeder der Aufgaben wenigstens zwei Schüler etwas sagen können (siehe auch bei Zusatzregeln).

Vorstellungsphase (ab 16 Uhr)

Die beiden Mannschaften fordern sich abwechselnd mit einer beliebigen Aufgabe heraus. Fordert hierbei Mannschaft *A* die Mannschaft *B* heraus, so kann

1. die Mannschaft *B* die Herausforderung annehmen und dann
 - schickt Mannschaft *B* einen Referenten und Mannschaft *A* einen Kritiker zur Tafel
 - der Referent trägt *dem Kritiker* die Ergebnisse seiner Mannschaft zur Aufgabe vor
 - *danach* darf der Kritiker Fehler und Lücken, die er bemerkt hat, aufdecken und, sofern er das kann, diese Lücken schließen
 - vergibt die Jury für jede Aufgabe maximal 12 Punkte; der Referent erhält davon den Anteil der von ihm erbrachten Lösungsteile, der Kritiker die Hälfte der Punkte des Anteils, den die von ihm bemerkten Fehler oder Lücken ausmachen - kann er diese Lücken schließen, erhält er anteilig die restlichen Punkte; ansonsten verfallen die Punkte
2. oder die Mannschaft *B* kann die Herausforderung ablehnen und dann
 - *muss* Mannschaft *A* einen Referenten zum Vorrechnen nominieren, ebenso schickt Mannschaft *B* einen Kritiker
 - alles weiter wie in obigem Fall, nur dass der Kritiker aufgedeckte Lücken nicht schließen darf
 - kann insbesondere Mannschaft *A*, trotz ihrer Herausforderung, die Aufgabe dann nicht vorrechnen, erhält Mannschaft *B* die Hälfte der Punkte für die aufgedeckten Lücken - in diesem Fall ist die Lücke alles - also 6 Punkte

Hierbei gelten folgende Zusatzregeln:

1. Erst wenn alle anderen einmal Referent (bzw. Kritiker) waren, darf man zum zweiten Mal Referent (bzw. Kritiker) sein.
2. Das Vortragen von Referent **und** Kritiker sollte weitgehend frei erfolgen, der Jury stehen Punktabzüge für ein reines Ablesen **und** An-die-Tafel-Übertragen einer Lösung von einem vorgefertigten Zettel frei.
3. Jede Mannschaft hat einmal während des Wettstreites das Recht, einen eigenen Referenten während seines Vortrages auszuwechseln (auf dessen Wunsch **hin** oder weil er offensichtlich Probleme beim Vorrechnen hat). Die Entscheidung darüber, wann von diesem Recht Gebrauch gemacht wird, liegt bei der Mannschaft und wird vom Kapitän verkündet. Die Zusatzregel 1 bleibt dabei gültig.

Bemerkungen:

- Der Kritiker darf zwar erst nach dem Ende des Vortrages des Referenten Fehler aufdecken, aber er darf natürlich auch während des Vortrages den Referenten bitten, einen Schritt zu übergehen, weil dieser klar ist oder ihn bitten einen Schritt noch einmal zu wiederholen.
- Beim Aufdecken der Fehler durch den Kritiker ist dem Referent die Möglichkeit zu geben, diese (sofort, ohne weiteres Nachdenken) zu schließen, so daß der Kritiker keine Punkte für Lücken erhält, die sich aus der Vergeßlichkeit des Referenten ergeben.